УДК 681.3

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

А.И. Провотар, А.В. Лапко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03127, Київ, проспект Академіка Глушкова 2, к. 6, факс 259 7044, тел. 259 0511,
e-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua
Університет міста Жешув (Польща)

Рассматриваются вопросы вычисления неопределенностей, предлагаемые теорией вероятностей с одной стороны, и теорией возможностей – с другой. На примерах конкретных задач исследуются различия в подходах с точки зрения интерпретации базовых понятий этих теорий в интеллектуальных системах поддержки принятия решений.

Issues of the calculating of the uncertainty are considered in the article that are proposed by theory of probability on one side and the theory of possibility on another. Difference in the approaches in terms of interpretation of the basic concepts of two theories of fuzziness in intelligent decision support systems is researched on the examples of specific tasks.

Введение

С тех пор как Л. Заде в 1965 году предложил концепцию нечеткости состоялось много дискуссий об отношении теории нечеткости и теории вероятностей. Обе теории, как известно, изучают неопределенность. Значения вероятности и возможности произвольного события принадлежит промежутку [0, 1]. Кроме того, обе теории подобны во многих других аспектах, о которых будем говорить далее.

Цель настоящей работы – сравнение различных подходов к вычислению неопределенностей для того, чтобы более четко определить возможности той или иной теории при построении формальных моделей решения задач. Точнее говоря моделей, которые будут более адекватными (эффективными, оптимальными) при решении задач из заданных предметных областей. В связи с этим рассматривается большое количество примеров.

Кроме того, приводятся новые постановки задач и предлагаются соответствующие модели вычисления неопределенностей.

Вероятность. Рассмотрим основные известные понятия и определения обеих теорий и сравним их.

Теория вероятностей изучает вероятности событий – произвольных подмножеств пространства элементарных взаимно исключающих событий. Например, когда подбрасываем кубик, грани которого отмечены номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, то возможны падения кубика на одну из этих шести граней. Все другие результаты считаются невозможными. Составляемое этими числами множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ исходов образует пространство элементарных событий. Вероятность каждого из этих шести событий равна 1/6.

Событие может содержать несколько элементарных событий. Например, события A и B могут быть следующими:

$$A = \{1, 3, 5\},\ B = \{1, 2, 3\}.$$

Для того, чтобы определять вероятности событий в пространстве элементарных событий, вводится понятие распределения вероятностей. Это числовая функция $\boldsymbol{P}$, которая присваивает число $\boldsymbol{P}(A)$ элементарному событию A. Область определения функции $\boldsymbol{P}$ расширяется на множество 2^S. При этом:

1) $0 \le \boldsymbol{P}(A) \le 1$;
2) $\boldsymbol{P}(S) = 1$;
3) для взаимоисключающих событий $A_1, A_2, \ldots$, (т. е. для любых $i \ne j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$);

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_i).$$

Таким образом, $\boldsymbol{P}(A)$ обозначает вероятность события A, а пространство элементарных событий S – область определения функции распределения вероятностей. В примере с кубиком вероятность $\boldsymbol{P}$ определяется как $\boldsymbol{P}(i) = 1/6$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Кроме того, функция распределения вероятностей имеет следующие свойства:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B); \quad (1)$$

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B), \text{ якщо } A \cap B = \varnothing; \quad (2)$$

$$\boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1. \quad (3)$$

Возможность. Как известно [1], нечетким множеством A в некотором (непустом) универсальном пространстве $\boldsymbol{X}$ (обозначается $A \subseteq \boldsymbol{X}$) называется множество пар

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \boldsymbol{X}\},$$

где μ_A: $\boldsymbol{X} \to [0,1]$ – функция принадлежности нечеткого множества A. Эта функция приписывает каждому элементу $x \in \boldsymbol{X}$ меру его принадлежности к нечеткому множеству A. При этом, если $\mu_A(x) > 0$, то элемент x принадлежит множеству A, если $\mu_A(x) = 0$, то элемент x множеству A не принадлежит.

Функция μ_A может быть определена как функция распределения возможностей [2, 3] для множества A в пространстве $\boldsymbol{X}$. Возможность элемента x обозначается $\mu_A(x)$ и эти возможности определяют нечеткое множество A.

Например, если предположить, что Софи имеет количество сестер, которое определяется элементом множества $N = \{1, 2, \ldots, 10\}$, то это множество можно рассматривать как пространство элементарных событий и как универсальное пространство. Соответствующие функции распределения вероятностей и возможностей можно задать следующим образом (табл. 1):

ТАБЛИЦА 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{P}(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0	0	0	0	0
$\mu(x)$	0.9	1.0	1.0	0.7	0.5	0.2	0.1	0	0	0

Как видно из табл. 1, сума вероятностей равна 1, а сума возможностей больше 1.

Сравнение вероятности и возможности. Отметим, что вероятность и возможность описывают неопределенность. Возможность может рассматриваться как верхняя грань вероятности. То есть, возможность $\mu(A)$ и вероятность $\boldsymbol{P}(A)$ события A находятся в отношении

$$\mu(A) \geq \boldsymbol{P}(A).$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ взаимоисключающие, то вероятность объединения этих событий равна сумме вероятностей этих событий, а пересечение – их произведению:

$$\boldsymbol{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \boldsymbol{P}(A_i).$$

$$\boldsymbol{P}(\bigcap_i A_i) = \boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(A_2) \ldots \boldsymbol{P}(A_n).$$

Возможность объединения событий равна максимуму возможностей, а пересечение равно минимуму возможностей этих событий.

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \max_i \mu(A_i),$$

$$\mu(\bigcap_i A_i) = \min_i \mu(A_i).$$

В табл. 2 приведены сравнения возможности и вероятности.

ТАБЛИЦА 2

	Возможность	Вероятность
Область	Универсальное множество X	Вероятностное пространство S
Значения	[0,1]	[0,1]
Ограничения	нет	$\sum_i \boldsymbol{P}(A_i)$
Объединение	$\mu(\bigcup_i A_i) = \max_i \mu(A_i)$	$\boldsymbol{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \boldsymbol{P}(A_i)$
Пересечение	$\mu(\bigcap_i A_i) = \min_i \mu(A_i)$	$\boldsymbol{P}(\bigcap_i A_i) = \boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(A_2) \ldots \boldsymbol{P}(A_n)$

Вероятность нечеткого события. Когда мы имеем дело с обычной теорией вероятностей, события имеют точные описания. Например, событие $A = \{1, 3, 5\}$ из вышеприведенного примера имеет четкое описание и поэтому может быть представлено обычным множеством. Когда мы имеем дело с нечетко определенным событием, то в этом случае оно может представляться нечетким множеством. Например, событие “большое число” может быть представлено нечетким множеством

$$B = \{(6, 0.9), (5, 0.7), (6, 0.5)\}.$$

Известны [3] два подхода к вычислению вероятностей таких и подобных событий. Первый из них состоит в описании четкого события нечетким множеством с дальнейшим вычислением обычной вероятности события, другой – в описании нечеткого события нечетким множеством с дальнейшим вычислением вероятности события как нечеткого множества. Точнее говоря, если A – нечеткое множество в пространстве $\boldsymbol{X}$, описывающее четкое событие в этом пространстве, т. е.

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \boldsymbol{X}\},$$

то вероятность этого события может быть вычислена по формуле

$$\boldsymbol{P}(A) = \sum_{i \in A} \mu_A(x)\boldsymbol{P}(x).$$

Например, пусть пространство элементарных событий $S = \{a, b, c, d\}$, события взаимоисключающие и функция распределения вероятностей задается соотношениями

$$\boldsymbol{P}(a) = 0.2,\ \boldsymbol{P}(b) = 0.5, \boldsymbol{P}(c) = 0.2, \boldsymbol{P}(d) = 0.1.$$

В этом случае событие $A = \{a, b, c\}$ может быть задано нечетким множеством с функцией принадлежности, определяемой соотношениями

$$\mu_A(a) = \mu_A(b) = \mu_A(c) = 1, \mu_A(d) = 0.$$

Вероятность события A в этом случае может быть вычислена следующим образом:

$$\boldsymbol{P}(A) = 1{\cdot}0.2 + 1{\cdot}0.5 + 1{\cdot}0.2 = 0.9.$$

Если событие A задано нечетким множеством A, т. е., например,

$$A = \{(a, 0.5), (b, 1), (c, 0.1)\},$$

то обычная вероятность такого нечеткого события вычисляется как:

$$\boldsymbol{P}(A) = 0.5{\cdot}0.2 + 1{\cdot}0.5 + 0.1{\cdot}0.2 = 0.62.$$

Возможность нечеткого события. Некоторое обобщение предложенного подхода к вычислению вероятностей нечетких событий позволяет вычислять возможности нечетких событий. А именно, если A и B – нечеткие множества в пространстве $\boldsymbol{X}$, описывающие нечеткие события в этом пространстве, т. е.

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \boldsymbol{X}\},$$
$$B = \{(x, \mu_B(x)), x \in \boldsymbol{X}\},$$

то возможность того, что произойдут события A и B может быть вычислена по формуле

$$\mu(C) = \sum_{x \in} \boldsymbol{X}\mu_A(x)\ \mu_B(x).$$

Рассмотрим два нечетких события: первое – это падения кубика на одну из его шести граней, другое – это выпадение большого числа. И первое и второе события описываются нечеткими множествами

$$A = \{(1, 1/6), (2, 1/6), \dots, (6, 1/6)\} \text{ и}$$
$$B = \{(5/1), (6/1)\},$$

соответственно. Тогда возможность выпадения большого числа в этом случае может быть вычислена по вышеприведенной формуле и равна

$$\mu(C) = 1/6{\cdot}0 + 1/6{\cdot}0 + 1/6{\cdot}0 + 1/6{\cdot}0 + 1/6{\cdot}1 + 1/6{\cdot}1 = 1/3.$$

Следует заметить, что в этом случае возможность и вероятность нечеткого события B совпадают. Это связано с тем, что функция распределения возможностей события A может рассматриваться как функция распределения вероятностей этого события. В случае, если функция распределения вероятностей не удовлетворяет приведенным выше условиям, возможность события C может быть вычислена по формуле

$$\mu(C) = \max_{x \in} \boldsymbol{X}\{\mu_A(x)\mu_B(x)\}.$$

Нечеткая вероятность нечеткого события. Рассмотрим следующее нечеткое событие (множество) в пространстве $\boldsymbol{X}$:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \boldsymbol{X}\}.$$

α-сечение события (множества) A определяется как следующее обычное множество:

$$A_\alpha = \{x, \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Соответственно, вероятность такого события –

$$\boldsymbol{P}(A_\alpha) = \sum_{x \in A_\alpha} \boldsymbol{P}(x).$$

Здесь A_α – объединение взаимоисключающих элементарных событий. Вероятность A_α – это сума вероятностей элементарных событий из A_α.

Говорят, что возможность того, что вероятность события A_α есть $\boldsymbol{P}(A_\alpha)$ равна α. Используя такую интерпретацию, определяется нечеткая вероятность $\boldsymbol{P}(A)$ события A соответствующая α, а именно:

$$\boldsymbol{P}(A) = \{(\boldsymbol{P}(A_\alpha),\alpha),\ \alpha \in [0,1]\}.$$

Например, предположим, что вероятности элементарных событий в пространстве $S = \{a, b, c, d\}$ равны

$$\boldsymbol{P}(a) = 0.2,\ \boldsymbol{P}(b) = 0.3,\ \boldsymbol{P}(c) = 0.4,\ \boldsymbol{P}(d) = 0.1.$$

Нечеткое событие (множество) A задается как:

$$A = \{(a, 1), (b, 0.8), (c, 0.5), (d, 0.3)\}.$$

Рассмотрим события A_α, определяемые α-сечениями:

$$A_{0.3} = \{a, b, c, d\},$$
$$A_{0.5} = \{a, b, c\},$$
$$A_{0.8} = \{a, b\},$$
$$A_1 = \{a\}.$$

Поскольку это обычные события (множества), можно просто вычислить их вероятности:

$$\boldsymbol{P}(A_{0.3}) = 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.1 = 1;$$
$$\boldsymbol{P}(A_{0.5}) = 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9;$$
$$\boldsymbol{P}(A_{0.8}) = 0.2 + 0.3 = 0.5;$$
$$\boldsymbol{P}(A_1) = 0.2.$$

Следовательно, возможности того, что вероятности событий A_α равны $\boldsymbol{P}(A_\alpha)$ есть α, и вероятность нечеткого события A –

$$\boldsymbol{P}(A) = \{(1, 0.3), (0.9, 0.5), (0.5, 0.8), (0.2, 1)\}.$$

Примеры (вычисление возможностей и вероятностей различных событий).

1. Предположим, что имеется 10 экзаменационных билетов. В каждом билете по 4 вопроса, причем в билетах 1–4 студент знает ответы на все вопросы, в билетах 5–8 – на три из четырех, а в билетах 9 и 10 – на два из четырех вопросов.

Какова возможность (вероятность) сдать экзамен, если остались только 6 и 10 билеты?

Для ответа на этот вопрос сначала нужно определить, что означает событие A = “студент сдал экзамен”. Если это событие означает, что студент ответил на 3 или 4 вопроса, то, во-первых, это равносильно тому, что он вытащил билет с 1 по 8. Во-вторых, вероятность события A в этом случае будет равняться

$$\boldsymbol{P}(A) = 8/10 = 4/5.$$

Если остались только 6 и 10 билеты, то вероятность события A равняется 1/2.

Поскольку элементарные события – вытаскивание билетов – в этой задаче равновероятны и равновозможны, то естественно полагать, что возможность того, что произойдет событие A (если остались только 6 и 10 билеты) равна вероятности этого события и равна 1/2.

Несколько изменим постановку задачи. А именно, введем в рассмотрение нечеткое событие B = “высокая оценка”. Поскольку это событие равносильно вытаскиванию билетов 1–8, то его можно описать, например, таким нечетким множеством:

$$F = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 3/4), (6, 3/4), (7, 3/4), (8, 3/4), (9, 1/2), (10, 1/2)\}.$$

Тогда вероятность этого нечеткого события вычисляется по формуле, вышеприведенной, и равна

$$\boldsymbol{P}\,(F) = 1/10\cdot 1 + 1/10\cdot 1 + 1/10\cdot 1 + 1/10\cdot 1 + 1/10\cdot 3/4 + 1/10\cdot 3/4 + 1/10\cdot 3/4 + 1/10\cdot 3/4 + 1/10\cdot 1/2 + 1/10\cdot 1/2 = 4/5.$$

Если остались только 6 и 10 билеты, то вероятность получения высокой оценки равняется вероятности нечеткого события $G = \{(6, 3/4), (10, 1/2)\}$, которая вычисляется как:

$$\boldsymbol{P}(G) = 1/2\cdot 3/4 + 1/2\cdot 1/2 = 5/8.$$

В случае, когда мы имеем дело с распределением возможностей при вытаскивании билетов, например, таким:

$$\mu_A(1) = 0.5,\ \mu_A(2) = 0.5,\ \mu_A(3) = 0.5,\ \mu_A(4) = 0.5,\ \mu_A(5) = 0.5,\ \mu_A(6) = 0.5,\ \mu_A(7) = 0.5,\ \mu_A(8) = 0.5,\ \mu_A(9) = 0.5,$$
$$\mu_A(10) = 0.9,$$

то возможность получения высокой оценки студентом может вычисляться следующим образом:

$$\mu\,(F) = \max_{x\in}\{\mu_A(x)\mu_F(x)\} =$$

$$= \max_{x\in}\{0.5\cdot 1,\ 0.5\cdot 1,\ 0.5\cdot 1,\ 0.5\cdot 1,\ 0.5\cdot 3/4,\ 0.5\cdot 3/4,\ 0.5\cdot 3/4,\ 0.5\cdot 3/4,\ 0.5\cdot 1/2,\ 0.9\cdot 1/2\} = 1/2.$$

Если остались только 6 и 10 билеты, то возможность получения высокой оценки равняется возможности нечеткого события $G = \{(6, 3/4), (10, 1/2)\}$, которая вычисляется как:

$$\mu(G) = \max_{x\in}\{0.5\cdot 3/4,\ 0.9\cdot 1/2\} = 9/20.$$

Теперь найдем нечеткую вероятность нечеткого события F. Рассмотрим α-сечение события F, которые имеют следующий вид:

$$F_{0.5} = \{1, \dots , 10\};$$
$$F_{0.75} = \{1, \dots , 8\};$$
$$F_1 = \{1, \dots , 4\}.$$

Посчитаем вероятность исполнения каждого события F_α:

$$\boldsymbol{P}(F_{0.5}) = 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 = 1;$$
$$\boldsymbol{P}(F_{0.75}) = 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 = 4/5;$$
$$\boldsymbol{P}(F_1) = 1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/10 = 2/5.$$

Следовательно, нечеткая вероятность нечеткого события F –

$$\boldsymbol{P}(F) = \{(1, 0.3), (4/5, 0.75), (2/5, 1)\}.$$

2. При стрельбе по мишени, изображенной на рис. 1, множество (пространство) возможных результатов стрельбы – попадание в соответствующую область, является $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

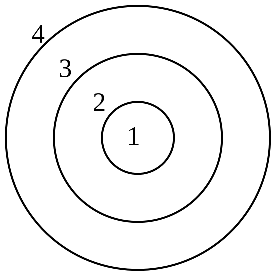

РИС. 1

Стрелок при попадании в область 1 получает 10 балов, при попадании в область 2 – 8 балов, при попадании в область 3 – 5 балов и при попадании в область 4 – 0 балов. Пусть для стрелка вероятность попасть в область 1 равна 0.1, в область 2 – 0.1, в область 3 – 0,2 и в область 4 – 0.6.

Какова возможность (вероятность) того, что стрелок за один выстрел получит максимальное количество балов?

Получение максимального количества балов равносильно попаданию в область 1. Поэтому вероятность этого события равна 0.1.

Изменим постановку задачи. А именно, введем в рассмотрение нечеткое событие B = “высокий результат”. Это событие можно описать, например, таким нечетким множеством:

$$F = \{(1, 1), (2, 0.8), (3, 0.6), (4, 0.1)\}.$$

Тогда вероятность того, что в результате выстрела по мишени будет получен высокий результат, равна

$$\boldsymbol{P}\,(F) = 0.1 \cdot 1 + 0.8 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.6 = 0.36.$$

В случае, когда имеем дело с распределением возможностей при стрельбе по мишени, например, таким:

$$\mu_A(1) = 0.5,\ \mu_A(2) = 0.5,\ \mu_A(3) = 0.5,\ \mu_A(4) = 0.9,$$

то возможность получения высокого результата может вычисляться следующим образом:

$$\mu\,(F) = \max_{x \in X}\{\mu_A(x)\mu_F(x)\} = \max_{x \in X}\{0.5 \cdot 1, 0.5 \cdot 0.8, 0.5 \cdot 0.6, 0.9 \cdot 0.1\} = 1/2.$$

Теперь найдем нечеткую вероятность нечеткого события F. Рассмотрим α-сечение события F, которые имеют следующий вид:

$$F_{0.1} = \{1, 2, 3, 4\};$$
$$F_{0.6} = \{1, 2, 3\};$$
$$F_{0.8} = \{1, 2\};$$
$$F_1 = \{1\}.$$

Тогда вероятность исполнения каждого события F_α вычисляется как:

$$\boldsymbol{P}(F_{0.1}) = 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.6 = 1;$$
$$\boldsymbol{P}(F_{0.6}) = 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4;$$
$$\boldsymbol{P}(F_{0.8}) = 0.1 + 0.1 = 0.2;$$
$$\boldsymbol{P}(F_1) = 0.1 = 0.1.$$

Следовательно, нечеткая вероятность нечеткого события F –

$$\boldsymbol{P}(F) = \{(1, 0.1), (0.4, 0.6), (0.2, 0.8), (0.1, 1)\}.$$

3. Передача информации из пункта A в пункт B возможна по одному из пяти маршрутов, как показано на рис. 2.

Для каждого маршрута определена длительность передачи блока информации, соответственно это величины $t_1, \ldots, t_5$. При этом, чем больше длительность передачи блока информации, тем больше вероятность (возможность) перехвата этой информации.

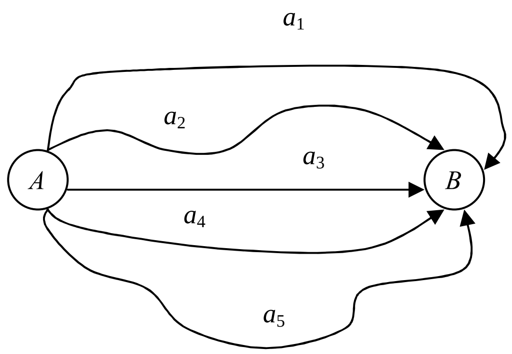

РИС. 2

Нужно выбрать наименее рискованный маршрут для передачи информации. Естественно наименее рискованным маршрутом для передачи информации следует считать маршрут с наименьшей длительностью передачи блока информации или (что – то же) наименьшей вероятностью перехвата информации на маршрутах a_i, которую можно определить следующим образом:

$$\boldsymbol{P}(a_i) = t_i/(t_1 + \ldots + t_5).$$

Изменим постановку задачи. А именно, введем в рассмотрение нечеткое событие B = “не очень рискованный маршрут”. Предположим, что это событие может быть описано, например, таким нечетким множеством:

$$F = \{(a_1, 0.5), (a_2, 0.8), (a_3, 0.9), (a_4, 0.1), (a_5, 0.2)\}.$$

Тогда вероятность того, что будет выбран не очень рискованный маршрут для передачи информации, равна

$$\boldsymbol{P}(F) = \boldsymbol{P}(a_1)\cdot 0.5 + \boldsymbol{P}(a_2)\cdot 0.8 + \boldsymbol{P}(a_3)\cdot 0.9 + \boldsymbol{P}(a_4)\cdot 0.1 + \boldsymbol{P}(a_5)\cdot 0.2 = t_1/(t_1 + \ldots + t_5)\cdot 0.5 + t_2/(t_1 + \ldots + t_5)\cdot 0.8 + t_3/(t_1 + \ldots + t_5)\cdot 0.9 + t_4/(t_1 + \ldots + t_5)\cdot 0.1 + t_5/(t_1 + \ldots + t_5)\cdot 0.2 = (t_1\cdot 0.5 + t_2\cdot 0.8 + t_3\cdot 0.9 + t_4\cdot 0.1 + t_5\cdot 0.2)/(t_1 + \ldots + t_5).$$

В случае, когда мы имеем дело с распределением возможностей при выборе маршрута передачи информации, например, таким:

$$\mu_A(a_1) = 0.5,\ \mu_A(a_2) = 0.6,\ \mu_A(a_3) = 0.6,\ \mu_A(a_4) = 0.9,\ \mu_A(a_5) = 0.1,$$

то возможность того, что будет выбран не очень рискованный маршрут для передачи информации, равна

$$\mu(F) = \max_{x\in}\{\mu_A(x)\mu_F(x)\} = \max_{x\in}\{0.5\cdot 0.5,\ 0.6\cdot 0.8,\ 0.6\cdot 0.9,\ 0.9\cdot 0.1,\ 0.1\cdot 0.2\} = 0.54.$$

Теперь найдем нечеткую вероятность нечеткого события F. Рассмотрим α-сечение события F, которые имеют следующий вид:

$$F_{0.1} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\};$$
$$F_{0.2} = \{a_1, a_2, a_3, a_5\};$$
$$F_{0.5} = \{a_1, a_2, a_3\};$$
$$F_{0.8} = \{a_2, a_3\};$$
$$F_1 = \{a_3\}.$$

Тогда вероятность каждого события F_α вычисляется как:

$$\boldsymbol{P}(F_{0.1}) = (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5)/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5) = 1;$$
$$\boldsymbol{P}(F_{0.2}) = (t_1 + t_2 + t_3 + t_5)/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5);$$
$$\boldsymbol{P}(F_{0.5}) = (t_1 + t_2 + t_3)/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5);$$
$$\boldsymbol{P}(F_{0.8}) = (t_2 + t_3)/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5);$$
$$\boldsymbol{P}(F_{0.9}) = t_3/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5).$$

Следовательно, нечеткая вероятность нечеткого события F –

$$\boldsymbol{P}(F) = \{(1, 0.1), ((t_1 + t_2 + t_3 + t_5)/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5), 0.2), ((t_1 + t_2 + t_3)/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5), 0.5), ((t_2 + t_3)/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5), 0.8), (t_3/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5), 0.9\}.$$

Выводы. Предложены подходы к вычислению неопределенностей, которые могут применяться в задачах оптимального оценивания, принятия решений, анализа и интерпретации эксперимента и т. д. Гибкость при решении задач из этих областей достигается, в первую очередь, использованием аппарата нечетких множеств, который позволяет выполнять вычисления вероятности и возможности нечетко описанных событий. Решение приведенных в работе примеров использует дискретный подход в теории нечеткости. Предполагается, что предложенные подходы могут быть обобщены на непрерывный случай и, соответственно, на другие классы задач, что, по мнению авторов, может быть предметом следующей работы.

1. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Телеком, 2006. – 382 с.

2. *Leski J.* Systemy neuronowo-rozmyte. – Warszawa: Naukowo-Techniczne, 2008. – 690 c.

3. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets ana Systems, 1978. – N 1. – P. 3–28.